Universität Dortmund, Sommersemester 2007
Institut für Philosophie
C. Beisbart

Grundprobleme der Wissenschaftsphilosophie (Überblick 20. Jahrhundert)

Aufgabe zum 15.5.2007

Textgrundlage: Lauth und Sareiter, Wissenschaftliche Erkenntnis, Anhang D, 1–4, ohne den Satz von Bayes (246–254).

1. Betrachten Sie folgende Zufallsereignisse: A: Der nächste Mensch (in einer Reihe) ist blond. B: Der nächste Mensch ist ein Mann. Die Wahrscheinlichkeit, daß der nächste Mensch eine blonder Mann ist, sei 15%. Die Wahrscheinlichkeit, daß der nächste Mensch ein nicht-blonder Mann ist, betrage 45%.

   Wir unterscheiden jetzt noch zwei Szenarien. 1: Die Wahrscheinlichkeit, daß der nächste eine blonde Frau ist, betrage 10%. 2: Die Wahrscheinlichkeit, daß der nächste eine blonde Frau ist, betrage 30%.

   Berechnen Sie für beide Szenarien

   (a) die Wahrscheinlichkeit, daß der nächste Mensch eine Frau ist.

   (b) die Wahrscheinlichkeit, daß der nächste Mensch blond ist.

   (c) die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß der nächste Mensch blond ist, vorausgesetzt, er ist eine Frau.

Vorüberlegungen: Für beide Szenarien können wir den Ereignisraum (Lauth und Sareiter, im folgenden LS, S. 247) durch folgende Möglichkeiten darstellen.

1. *Die nächste Person ist blond und ein Mann* ($\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$ *bzw. mengentheoretisch:* $A \cap B$*).*
2. *Die nächste Person ist blond und eine Frau* ($\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}$ *bzw.* $\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}$*, wobei* $\overline{\mathrm{B}}$ *das Komplement von* B *ist, also alle Ereignisse enthält, die nicht in* B *sind).*
3. *Die nächste Person ist nicht blond und ein Mann* ($\neg\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$ *bzw.* $\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$*).*
4. *Die nächste Person ist nicht blond und eine Frau* ($\neg\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}$ *bzw.* $\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$*).*

In der Aufgabenstellung sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

1. $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0.15$.
2. $P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = 0.45$.
3. $P(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = 0.1/0.3$.

Es gilt nun allgemein für Mengen A und B:

$$\begin{aligned} p(\mathrm{A}) &= p\left((\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})\right) \\ &= p\left(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}\right) + p\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Die erste Gleichung beruht darauf, daß man die Menge A alternativ darstellt (anschaulich: jemand, der blond ist, ist entweder ein blonder Mann oder eine blonde Frau). Im zweiten Schritt wendet man das dritte Kolmogoroff-Axiom an (LS, 250). Dabei nutzt man aus, daß die Mengen $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ *und* $(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})$ *disjunkt sind – ihre Schnittmenge* $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})$ *ist leer – anschaulich: eine Person kann nicht ein blonder Mann und eine blonde Frau sein.*

Außerdem gilt (Normierung = zweites Kolmogoroff-Axiom; LS, 250):

$$p\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + p\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right) + p\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}\right) + p\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}\right) = 1\;. \tag{2}$$

Daraus können wir unmittelbar die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die nächste Person eine nicht-blonde Frau ist, $p\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}\right)$, *ableiten. Sie beträgt etwa in Szenario 1:*

$$p\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}\right) = 1 - p\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) - p\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right) - p\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}\right) = 0.1 - 0.15 - 0.45 - 0.1 = 0.3\;. \tag{3}$$

Daraus kann man dann unter Anwendung von Gl. (1) *und einem Analogon für* $P(\mathrm{B})$ *die in Aufgaben (a) und (b) gefragten Wahrscheinlichkeiten berechnen. Wir fassen die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.*

Szenario 1	A	$\overline{\mathrm{A}}$	
B	$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0.15$	$p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = 0.45$	$p(\mathrm{B}) = 0.60$
$\overline{\mathrm{B}}$	$p(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = 0.10$	$p(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}) = 0.30$	$p(\overline{\mathrm{B}}) = 0.40$
	$p(\mathrm{A}) = 0.25$	$p(\overline{\mathrm{A}}) = 0.75$	

Szenario 2	A	$\overline{\mathrm{A}}$	
B	$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0.15$	$p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = 0.45$	$p(\mathrm{B}) = 0.60$
$\overline{\mathrm{B}}$	$p(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = 0.30$	$p(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}) = 0.10$	$p(\overline{\mathrm{B}}) = 0.40$
	$p(\mathrm{A}) = 0.45$	$p(\overline{\mathrm{A}}) = 0.55$	

Nun müssen wir noch die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß die nächste Person blond ist, unter der Bedingung, daß es sich um eine Frau handelt, $p(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{B}})$, *berechnen. Dazu gehen wir von der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit aus (LS, 252) und erhalten für Szenario 1:*

$$p(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{B}}) = \frac{p(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})}{p(\overline{\mathrm{B}})} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25\;. \tag{4}$$

Für Szenario 2 ergibt sich ein Wert von $p(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{B}}) = 0.75$.

2. Wie unterscheiden sich die beiden Szenarien qualitativ?

In Szenario 1 sind die beiden Ereignisse A *und* B *stochastisch unabhängig (LS, 253), während das in Szenario 2 nicht der Fall ist.*

Um das zu zeigen, müssen wir überprüfen, ob die Formel

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}) \tag{5}$$

gilt (ib.). Für Szenario 1 ist das in der Tat der Fall:

$$0.15 = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}) = 0.25 \times 0.60\;. \tag{6}$$

Für Szenario 2 gilt das nicht:

$$0.15 = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \neq p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}) = 0.75 \times 0.60 \,. \tag{7}$$

Die Unabhängigkeit in Szenario 1 hat zur Folge, daß die bedingte Wahrscheinlichkeit $p(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ *denselben Zahlenwert wie die Wahrscheinlichkeit* $p(\mathrm{A})$ *hat.*

Was heißt das anschaulich? Nun, in Szenario 1 macht es im Durchschnitt für das Geschlecht keinen Unterschied, welche Haarfarbe jemand hat. Die Haarfarben sind unter Männern und Frauen identisch verteilt. In Szenario 2 ist das nicht der Fall. Dort haben Frauen überproportional oft blonde Haare – öfter, als man das für Männer oder die Gesamtpopulation annehmen würde.

3. Nehmen Sie an, Sie sollten erraten, ob der nächste in der Reihe blond ist, wenn Sie bereits wissen, daß es sich um eine Frau handelt. Welchen Tip geben Sie jeweils vernünftigerweise in Szenario 1 und Szenario 2 ab?

Wenn wir bereits wissen, daß die nächste Person eine Frau ist, dann beruht der beste Tip, den wir geben können, auf der bedingten Wahrscheinlichkeit dafür, daß die nächste Person blond ist, vorausgesetzt, es handelt sich um eine Frau, $p(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{B}})$. *Im ersten Szenario beträgt diese Wahrscheinlichkeit* 0.25. *Da dieser Wert kleiner als* 0.50 *ist, tippen wir eher, daß die Person nicht blond ist. Im zweiten Szenario ist die besagte Wahrscheinlichkeit dagegen* 0.75. *Daher würden wir vernünftigerweise eher tippen, daß die Person in der Tat blond ist.*

An dieser Stelle kann man noch einmal die Wirkung von Unabhängigkeit illustrieren. Dazu vergleichen wir unseren Tip mit einem Tip, den wir geben würden, wenn wir nicht wüßten, daß die nächste Person eine Frau ist. Unter diesen Umständen könnten wir uns nur auf die Wahrscheinlichkeit $p(\mathrm{A})$ *stützen.*

In Szenario 1 macht es wegen der Unabhängigkeit keinen Unterschied, ob wir uns auf $p(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{B}})$ *oder auf* $p(\mathrm{A})$ *stützen – beide haben denselben Wert.*

In Szenario 2 macht es dagegen einen Unterschied, ob wir uns auf $p(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{B}}) = 0.75$ *oder auf* $p(\mathrm{A}) = 0.45$ *stützen – beide haben unterschiedliche Werte. Je nachdem ob wir schon wissen, daß die nächste Person eine Frau ist, geben wir unterschiedliche Tips ab: Wenn wir gar nichts über die nächste Person wissen, dann gehen wir eher davon aus, daß sie nicht blond ist. Wenn wir dann erfahren, daß es sich um eine Frau handelt, dann ändern wir unsere Meinung und raten eher, daß sie blond ist. Das Beispiel illustriert daher, wie wir unter dem Einfluß von neuen Informationen unsere Tips ändern. Diese neuen Informationen haben nicht unmittelbar mit dem, was wir erraten sollen, zu tun: Sie betreffen nicht die Haarfarbe. Dennoch können wir diese Information ausnützen, um unseren Tip zu verbessern.*

Für viele Philosophen zeigt dieses Beispiel, wie Information (über beobachtbare Ereignisse) unsere Tips bezüglich Theorien leiten sollte. Auch in der Bestätigungstheorie benützen einige Philosophen die Wahrscheinlichkeitstheorie.